6 Elementos de física relativista

Todos sabemos que viajamos en el tiempo, a razón de 24 horas por día. Y todos sabemos que podemos desplazarnos por el espacio a velocidades que van desde la de un caracol hasta la de un avión supersónico o un transbordador espacial. Pero relativamente pocas personas saben que el movimiento en el espacio está relacionado con el movimiento en el tiempo.

La primera persona que entendió la relación entre el espacio y el tiempo fue Albert Einstein. Einstein desafió el sentido común al afirmar en 1905 que al movernos en el espacio también alteramos la rapidez con la que avanzamos hacia el futuro, es decir, modificamos el transcurrir del tiempo. Einstein presentó esta idea en su ***Teoría Especial de la Relatividad***. En ella describe la influencia del movimiento de un reloj en el transcurrir del tiempo que mide dicho reloj, para el caso particular de que el reloj posea velocidad constante; como consecuencia deduce su famosa relación entre la masa y la energía. Diez años después Einstein publicó una teoría similar, llamada ***Teoría General de la Relatividad***, que incluía también los efectos del movimiento acelerado. Estas teorías han cambiado notablemente nuestras ideas acerca del funcionamiento del universo.

1 El principio de relatividad

Una experiencia que resulta familiar a las personas acostumbradas a viajar en tren es la siguiente. Estamos detenidos, por ejemplo a la entrada de una estación, y observamos que otro tren que estaba también en reposo junto a nosotros comienza a desplazarse lentamente hacia detrás. De pronto descubrimos que es nuestro tren el que se mueve hacia delante, mientras que el tren que observábamos permanece en reposo. Estamos pensando en términos de reposo y movimiento considerando implícitamente la superficie de la Tierra como sistema de referencia. Lo cierto es que si el tren tuviera un sistema de amortiguación idealmente perfecto y fuera imposible mirar por sus ventanillas, no podríamos determinar si se mueve con velocidad constante[1] o está en reposo.

En el interior de un avión en vuelo a gran velocidad podemos lanzar al aire una moneda y atraparla exactamente de la misma manera que si el avión estuviera en reposo. La sobrecargo puede servir el café igual que si el avión estuviese detenido en la pista. El movimiento de un péndulo es el mismo cuando el avión se mueve con velocidad constante que cuando no se mueve en absoluto. No existe experimento físico alguno que nos permita determinar nuestro estado de movimiento rectilíneo uniforme. Desde luego, podemos mirar por la ventanilla y ver pasar la Tierra a toda velocidad, o bien, podemos enviar una señal de radar al exterior. Pero no existe experimento alguno confinado a la cabina que permita determinar si hay o no movimiento rectilíneo uniforme.

Einstein consideró estas evidencias como hechos fundamentales, es decir, interpretó que respondían a una realidad básica, indemostrable, que debe ser asumida como punto de partida para entender la naturaleza, lo que conocemos como un principio. En este sentido enunció el ***primer principio de la relatividad especial*** afirmando que

> Todas las leyes de la naturaleza son las mismas en todos los sistemas de referencia con movimiento rectilíneo uniforme.

Si nos encontramos en un laboratorio que se mueve con aceleración es posible idear un sinnúmero de experimentos para determinar el valor de la misma. Pero, según Einstein, en el interior de un laboratorio con velocidad constante ningún resultado experimental depende de la velocidad del laboratorio. *A los sistemas de referencia carentes de aceleración, es decir, con movimiento rectilíneo uniforme, se les llama* ***sistemas de referencia inerciales***.

Consideremos dos sistemas de referencia, S y S', de orígenes O y O' respectivamente. El sistema de referencia S' se desplaza a lo largo del eje OX del sistema de referencia S con una velocidad constante v. Un punto cualquiera P tiene diferentes coordenadas respecto a S y a S'. Denotamos (x,y,z) a las coordenadas de P respecto a S, y (x',y',z') a las coordenadas de P respecto a S'. Si suponemos que en el instante $t = 0\ s$ los orígenes de los sistemas de referencia S y S' coinciden, es fácil deducir, sin más

[1] Cuando hablemos de velocidad debe entenderse siempre que nos estamos refiriendo a la magnitud vectorial, de manera que la constancia de la velocidad supone que se trata de un movimiento rectilíneo y uniforme.

que observar la *figura 1*, que las coordenadas del punto *P* respecto a ambos sistemas de referencia están ligadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Estas ecuaciones que permiten relacionar las posiciones que dos observadores atribuyen a un mismo punto reciben el nombre de ***transformaciones de Galileo***.

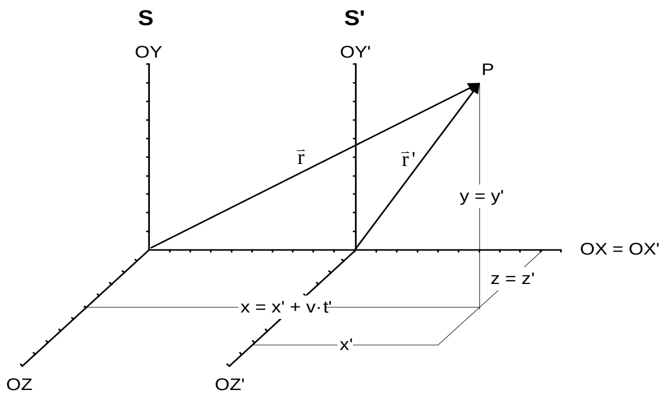

Figura 1 Las transformaciones de Galileo relacionan las posiciones que dos observadores inerciales atribuyen a un mismo punto P. Su deducción es inmediata a partir del dibujo. El origen del sistema de referencia S' se mueve con velocidad constante v a lo largo del eje OX del sistema de referencia S.

Cuando el punto *P* se mueve, la velocidad que tiene respecto al sistema de referencia *S* no es la misma que respecto al sistema de referencia *S'*. Por ejemplo, si el punto *P* está en reposo respecto al sistema de referencia *S'*, desde el sistema de referencia *S* se observa que se aleja con velocidad v en el sentido positivo del eje *OX*.

En general denotamos por (v_x, v_y, v_z) a las componentes de la velocidad del punto *P* respecto a la referencia *S* y mediante (v'_x, v'_y, v'_z) a las componentes de la velocidad del punto *P* respecto a la referencia *S'*. Podemos deducir la relación entre ambas velocidades a partir de las ecuaciones (1), derivando respecto al tiempo y teniendo en cuenta que la velocidad v con la que *S'* se mueve respecto a *S* es constante

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(x' + vt) = \frac{dx'}{dt} + v \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_x &= v'_x + v \\ v_y &= v'_y \\ v_z &= v'_z \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Dos observadores diferentes, situados respectivamente en los sistemas de referencia *S* y *S'*, atribuyen posiciones y velocidades distintas al punto *P*. Sin embargo ambos le asignan la misma aceleración. Para convencernos de ello no tenemos más que derivar con respecto al tiempo las ecuaciones (2), teniendo presente que el parámetro v es constante

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt}(v'_x + v) = \frac{dv'_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{dv'_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{dv'_z}{dt} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_x &= a'_x \\ a_y &= a'_y \\ a_z &= a'_z \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

Podemos interpretar que el resultado matemático obtenido reproduce el primer principio de la relatividad especial, por lo que respecta a las leyes físicas en las que las interacciones se representan mediante el concepto de fuerza. En efecto, cuando los observadores *S* y *S'* determinan la fuerza que actúa sobre el punto P, llegan a igual resultado, ya que ambos atribuyen a P la misma aceleración. En general, si S y S' emplean el concepto de fuerza para estudiar las interacciones, necesariamente establecerán leyes físicas idénticas.

Lo cierto es que desde la época de Newton se aceptaba la validez de la afirmación que constituye el primer principio de la relatividad especial, pero no como un postulado, sino como una consecuencia de las transformaciones de Galileo, las cuales se consideraban asentadas en principios geométricas incuestionables. Si Einstein “le dio la vuelta a la situación” fue debido a que una nueva evidencia experimental cuestionó la validez de las transformaciones de Galileo.

2 La velocidad de la luz es constante

El conjunto de ecuaciones (2), deducidas de las transformaciones de Galileo, relacionan las velocidades que a un mismo objeto le atribuyen dos observadores que se mueven uno respecto a otro con velocidad constante. Vamos a considerar una situación sencilla para entender mejor su significado.

Supón que un amigo tuyo es capaz de lanzar una pelota siempre con la misma rapidez de 60 km/h. Despreciando la resistencia del aire y otros pequeños efectos, la pelota se desplazará a 60 km/h en el momento en el que la atrapes. Imagina ahora que tu amigo te lanza la pelota desde la plataforma de un camión que se dirige hacia ti a 40 Km/h. ¿Qué rapidez tiene la pelota cuando la atrapas? Tendrás que emplear un guante protector porque la rapidez de la pelota será de 100 km/h (60 km/h respecto al camión más 40 km/h respecto al suelo).

Figurate ahora que el camión se aleja de ti a 40 km/h y que tu amigo vuelve a lanzarte la pelota. Esta vez no necesitas guante, pues la pelota te llega con una velocidad de 20 km/h (60 km/h respecto al camión menos 40 km/h respecto al suelo).

Figura 2 La pelota siempre se desplaza a 60 km/h respecto al camión. (a) Cuando tú y el camión estais en reposo relativo recibes la pelota con una velocidad de 60 km/h. (b) Cuando el camión se dirige hacia ti a 40 km/h recibes la pelota a 100 km/h (c) Cuando el camión se aleja de ti a 40 km/h la velocidad con la que recibes la pelota es de 20 km/h.

Estos resultados no suponen ninguna sorpresa ya que es de esperar que la pelota se desplace más deprisa si viajas hacia ella y más despacio si te alejas de ella. Lo que si que sería realmente sorprendente es que al realizar el experimento descubriéramos que la pelota la recibimos siempre con la misma rapidez independientemente de que nos acerquemos o nos alejemos de ella. Un resultado de estas características nos haría sentir bastante confundidos y nos obligaría a cuestionarnos nuestra noción de la realidad.

Las pelotas no se comportan de esta manera. ¡Pero resulta que la luz sí! Toda medición de la rapidez de la luz en el espacio vacío arroja el mismo valor de 300000 km/s sin importar la rapidez de la fuente ni del receptor. Normalmente no notamos este efecto debido a lo deprisa que se mueve la luz.

El hecho de que la velocidad de la luz en el vacío es constante fue descubierto a finales del siglo pasado. La luz proveniente de una fuente que se acerca llega al observador con la misma rapidez que la luz que proviene de una fuente que se aleja. Y la rapidez de la luz es la misma ya sea que nos alejemos o nos acerquemos a la fuente de luz. ¿Cómo tomó este descubrimiento la comunidad de físicos? Se quedaron perplejos. Tan perplejos como te quedarías tú si una pelota llegara siempre a tus manos con la misma velocidad sin importar como fuera lanzada. Los experimentos se repitieron una y otra vez siempre con el mismo resultado. Se propusieron diversas interpretaciones pero ninguna de ellas resultaba satisfactoria.

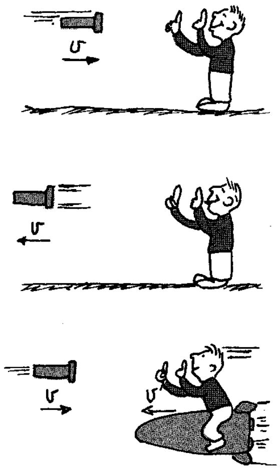

Figura 3 La velocidad con la que recibes la luz procedente de una linterna es siempre la misma, independientemente de que la linterna se mueva acercándose o alejándose de ti. Tampoco afecta que tu te muevas respecto a la linterna. La luz que “lanza” la linterna no se comporta como la pelota lanzada desde la plataforma de un camión.

Einstein consideró la constancia de la rapidez de la luz como un hecho fundamental, que tomo como punto de partida para elaborar una concepción nueva del espacio y del tiempo, convirtiéndolo en el ***segundo principio de la relatividad especial***

> La rapidez de la luz en el vacío siempre tendrá el mismo valor sin importar el movimiento de la fuente ni el movimiento del observador.

La aceptación de este principio pone cabeza a bajo algunas de nuestras concepciones acerca del mundo. Para empezar debemos admitir que las transformaciones de Galileo carecen de validez general. Pero, ¿cual de las suposiciones en ellas implícitas debemos cuestionarnos? Si para la luz resulta que el cociente entre desplazamiento y tiempo transcurrido es una constante independiente del sistema de referencia, resulta ineludible llegar a la conclusión de que el transcurrir del tiempo no es algo absoluto que ocurre siempre al mismo ritmo, sino que depende del propio sistema de referencia.

3 El espacio-tiempo

Newton y otros predecesores de Einstein pensaban que el espacio era una extensión infinita en la que existían todas las cosas. Estamos en el espacio y nos movemos en el espacio. Nunca quedó claro si el universo existía en el espacio o si el espacio existía dentro del universo. ¿Hay espacio fuera del universo? ¿O el espacio existe solo dentro del universo? Podríamos hacer las mismas preguntas en el caso del tiempo. ¿El universo existe en el tiempo, o bien el tiempo existe solo dentro del universo? ¿Existía el tiempo antes de que existiera el universo? ¿Seguirá existiendo el tiempo si el universo deja de existir? La respuesta que dio Einstein a estas preguntas es que tanto el espacio como el tiempo existen solo dentro del universo. No hay tiempo ni espacio en el exterior.

La idea con la que trabajaba Einstein era que la distinción clásica entre espacio y tiempo era dudosa. Para él el espacio y el tiempo eran parte de una entidad única el ***espacio-tiempo***. Sabemos que nos desplazamos en el tiempo a razón de 24 horas por día. Pero esto solo es la mitad de la cuestión. Para obtener la otra mitad debemos substituir en nuestro pensamiento "desplazarse en el tiempo" por "desplazarse en el espacio-tiempo". *Desde la perspectiva de la relatividad especial nos movemos en una combinación de espacio y tiempo, el espacio-tiempo, con rapidez constante. Si nos quedamos parados sólo nos movemos en el tiempo. Si avanzamos un poco, entonces una parte de nuestro desplazamiento se lleva a cabo en el espacio, pero la mayor parte sigue ocurriendo en el tiempo. Si nos desplazáramos a la velocidad de la luz, todo nuestro desplazamiento tendría lugar en el espacio ¡sin avanzar en el tiempo! Seríamos tan eternos como la luz, pues la luz solo viaja en el espacio, no en el tiempo, y es eterna.*

El movimiento en el espacio afecta al movimiento en el tiempo. Siempre que nos desplazamos en el espacio alteramos en cierto grado el ritmo con el que avanzamos hacia el futuro. Este es el fenómeno conocido como dilatación del tiempo, una especie de alargamiento del tiempo que es muy pequeño para las rapideces de la vida diaria pero que se hace notable a rapideces cercanas a las de la luz.

3.1 Dilatación del tiempo.

Para medir el tiempo usamos un reloj. Un reloj es cualquier aparato capaz de medir intervalos de tiempo periódicos, como, por ejemplo, el movimiento de un péndulo, las oscilaciones de una rueda de balanza o las vibraciones de un cristal de cuarzo. Vamos a considerar un reloj de luz, aparato más bien poco práctico, pero que nos ayudará a describir la dilatación temporal.

Imagina un tuvo vacío con espejos en los extremos. Un destello de luz rebota de un lado a otro entre los espejos paralelos. Los espejos son reflectores perfectos, de modo que el destello de luz rebota indefinidamente. Si el tubo tiene 300 000 km de longitud, cada viaje de un espejo a otro supondrá un segundo. Si el tubo tiene una longitud de 3 km, cada viaje supondrá 0.00001 s. Pero ello si estamos en reposo respecto al reloj de luz.

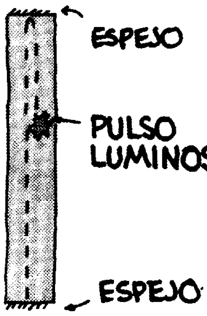

Figura 4 Reloj de luz observado en reposo. Un destello de luz (pulso luminoso) rebota entre dos espejos paralelos "marcando intervalos de tiempo iguales.

Supón que vemos pasar el reloj de luz a bordo de una nave a gran velocidad (situación B de la *figura 5*). Observaríamos que el destello de luz rebota de un lado a otro recorriendo una trayectoria diagonal más larga que la que veríamos si estuviéramos dentro de la nave acompañando al reloj de luz (situación A de la *figura 5*).

Pero según el segundo principio de la relatividad especial tanto el observador A como el B deben ver que la luz se mueve con la misma velocidad. Así pues el intervalo de tiempo que transcurra para B debe ser mayor que el intervalo de tiempo que transcurre para A. El tiempo en el interior de la nave transcurre más lentamente que en nuestra posición.

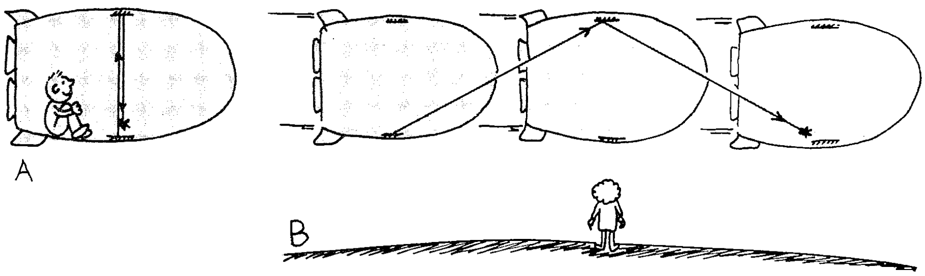

Figura 5 (a) Una persona que viaja a bordo de la nave espacial observa que el destello de luz se mueve en la dirección vertical entre los dos espejos de un reloj de luz. (b) Una persona que ve pasar la nave observa que el destello describe una trayectoria diagonal.

La dilatación del tiempo no es un fenómeno exclusivo del reloj de luz. Es el tiempo mismo en el marco de referencia en movimiento, visto desde nuestro marco de referencia, el que transcurre más lentamente. Los corazones de los ocupantes de la nave latirán con menor frecuencia. Veremos que todo ocurre más despacio en el interior de la nave. ¡Es el tiempo mismo el que se dilata!

¿Cómo ven los ocupantes de la nave su propio tiempo? ¿Se ven a sí mismos moviéndose en cámara lenta? ¿Experimentan intervalos de tiempo mayores como consecuencia de la dilatación temporal? Resulta que ellos no notan ninguno de estos efectos. El tiempo para ellos es igual que cuando nos parece que no se mueven. Recordemos el primer principio de la relatividad especial: todas las leyes de la naturaleza son las mismas en cualquier sistema de referencia con velocidad constante. Los ocupantes de la nave son incapaces de distinguir entre el movimiento uniforme y el reposo. No tienen indicio alguno de que lo que ocurre a bordo parece ocurrir más lentamente desde otros marcos de referencia.

¿Cómo ven nuestro tiempo los ocupantes de la nave? ¿Acaso ven que nuestro tiempo transcurre más deprisa? La respuesta es no: el movimiento es relativo y desde su marco de referencia les parecerá que somos nosotros quienes nos movemos. Así, ven que nuestro tiempo transcurre más lentamente, del mismo modo que nosotros vemos que su tiempo transcurre más lentamente. ¿Es esto una contradicción? En absoluto. Ambos observadores se refieren a ámbitos espacio-temporales distintos: sus mediciones no tienen por qué coincidir, salvo en una cantidad, la velocidad de la luz.

Al tiempo que mide un reloj en reposo en un sistema de referencia se le llama ***tiempo propio*** *de dicho sistema de referencia*. En nuestro ejemplo, si consideramos el intervalo de tiempo que se necesita para que el destello de luz vaya de un espejo a otro y vuelva al lugar desde el que fue emitido, será el ocupante de la nave quien medirá el intervalo de tiempo propio transcurrido, Δt_0. Cualquier otro observador que no acompañe a la nave medirá un intervalo de tiempo, Δt, mayor. Podemos encontrar fácilmente una relación matemática entre estos dos intervalos de tiempo.

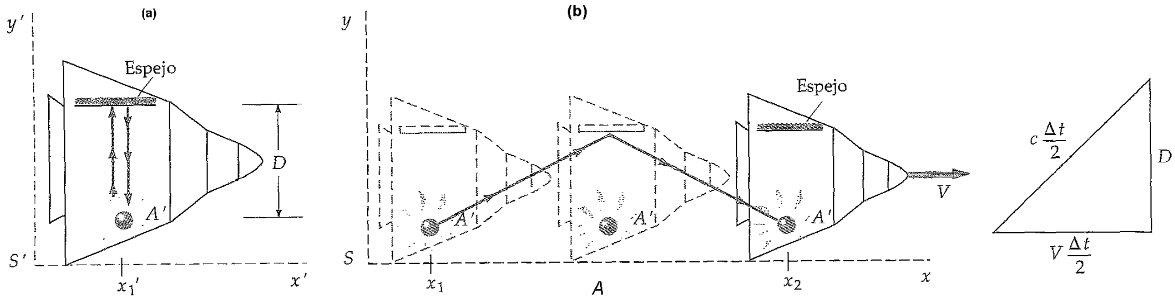

Figura 6 (a) El observador A' se encuentra en reposo respecto al reloj de luz en el interior de una nave. Este observador es el que mide el tiempo propio transcurrido cuando el destello de luz viaja de un espejo a otro del reloj de luz y regresa al lugar desde el que fue emitido. (b) La nave en la que se encuentra el observador A' y el reloj de luz se mueve con velocidad v respecto al observador A. El observador A medirá un intervalo de tiempo mayor.

En la *figura 6-a* se muestra la trayectoria de un destello de luz, desde que es emitido hasta que vuelve al punto desde el que fue emitido, vista por un observador *A'* en reposo respecto al reloj de luz. Si el reloj de luz tiene una altura D, durante el intervalo de tiempo Δt_0 que mide el observador *A'* la luz realiza un desplazamiento $2D$, de manera que

$$c = \frac{2D}{\Delta t_0} \Rightarrow D = c\frac{\Delta t_0}{2}$$

En la *figura 6-b* se muestra la trayectoria que vería un observador *A* para el cual la nave se mueve con velocidad v. El desplazamiento que para el observador *A* realiza el destello de luz, durante el intervalo de tiempo Δt por él medido, será $c\Delta t$. Este desplazamiento lo podemos considerar formados por dos trayectos iguales, de longitud $c\Delta t/2$, cada uno de los cuales corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos dos catetos son $v\Delta t/2$ y D. Sin más que aplicar el teorema de Pitágoras y recordar la relación entre D y Δt_0 deducida, obtenemos

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

De esta expresión de deduce la relación

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \textbf{(4)}$$

Debemos considerar el resultado obtenido como completamente general. Dados dos sucesos cualesquiera, el intervalo de tiempo que transcurre entre ellos es diferente según el observador que lo mida. *Un observador para el cual los sucesos ocurren en la misma posición, mide entre ellos un intervalo de tiempo menor que un observador que se mueve respecto al anterior, para el cual los sucesos ocurren en lugares diferentes. Llamamos* ***intervalo de tiempo propio*** *entre dos sucesos,*)t_0, *al intervalo de tiempo que mide un observador para el cual los sucesos ocurren en la misma posición.* La ecuación (4) relaciona este intervalo de tiempo propio con el intervalo de tiempo)t que mide un observador con velocidad v respecto al anterior.

A.1 Los astronautas de una nave espacial que se aleja de la Tierra con una velocidad de $0.6c$ interrumpen su conexión con el control espacial, diciendo que van a dormir una siesta de una hora y que luego volverán a llamar. ¿Cual es la duración de su siesta según se mide en la Tierra?

Solución: $1/0.8\ horas = 1.25\ horas$

A.2 En la situación de la actividad anterior, el control de Tierra informa a la nave que suspende las comunicaciones debido a una avería que cuesta una hora de reparar. Para los tripulantes de la nave ¿cuanto tiempo dura la interrupción de las comunicaciones?

Solución: $1/0.8\ horas = 1.25\ horas$

A.3 La vida media de un neutrón libre es de $700s$ ¿Cual sería su vida media si fuese acelerado hasta alcanzar velocidades de 0.7 veces la velocidad de la luz?
Selectividad 1988

Solución: $700/\sqrt{0.51}\ s = 980.2\ s$

A.4 Calcula la velocidad que ha de tener una partícula elemental para que su vida media se duplique respecto a la que tiene en reposo.
Dato: $c = 3{\times}10^8\ m/s$
Selectividad 1999

Solución: $c\sqrt{3}/2 = 2.6 \times 10^8\ m/s$

A.5 Determina la vida media, medida respecto al laboratorio, de un muón que se mueve a $0.6c$ respecto al laboratorio, si la vida media en reposo es de $2{\times}10^{-6}\ s$
Selectividad 1996

Solución: $2 \times 10^{-6}/0.8\ s = 2.5 \times 10^{-6}\ s$

3.2 Contracción de longitudes

Un fenómeno estrechamente relacionado con la dilatación del tiempo es la contracción de longitudes. *La longitud de un objeto medida por un observador en reposo respecto al objeto se llama longitud propia*. Cualquier otro observador que vea el objeto moviéndose, aprecia que la longitud del objeto en la dirección del movimiento es menor. La magnitud de esta contracción está relacionada con la magnitud de la dilatación del tiempo.

La contracción correspondiente a las rapideces de la vida diaria es tan pequeña que resulta indetectable, pero a rapideces próximas a las de la luz la contracción se hace notable. Una regla de un metro de longitud que pasara por delante de nosotros viajando en una nave al 87% de la rapidez de la luz parecería que sólo mide medio metro. Y si la nave viajara al 99.5% de la rapidez de la luz entonces parecería medir diez centímetros. Conforme la rapidez de la nave se aproximara a la de la luz la longitud de los objetos se acercaría a cero.

La contracción de los objetos en movimiento es la contracción del espacio mismo. El espacio se contrae sólo en una dirección: la del movimiento. Las dimensiones en cualquier dirección perpendicular a la del movimiento son iguales en ambos marcos de referencia. Así pues, si un objeto se desplaza en la dirección horizontal, su longitud vertical no sufre contracción alguna.

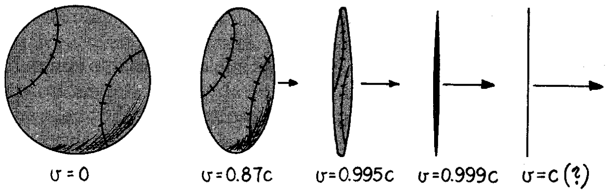

Figura 7 Conforme aumenta la velocidad con la que observamos un objeto, aumenta la contracción en la dirección del movimiento. Las longitudes en las direcciones perpendiculares al movimiento no se alteran.

Volviendo al ejemplo de la nave cuyas reglas observamos más pequeñas podemos plantearnos la siguiente pregunta ¿se contraen las reglas -y el resto del entorno- desde el punto de visita de las personas que viajan a bordo de la nave? La respuesta es no. Los ocupantes de la nave no detectan nada raro en las longitudes de los objetos que se encuentran en su marco de referencia. De lo contrario se violaría el primer postulado de la relatividad. No debemos olvidar que todas las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia con movimiento rectilíneo uniforme. Lo que ocurre es que como nuestro marco de referencia se está moviendo respecto a la nave, ellos observan que nuestras reglas son las que se contraen.

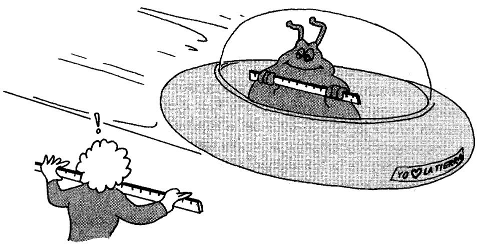

Figura 8 La chica ve la regla del extraterrestre más pequeña que la suya, por el contrario el extraterrestre ve la regla de la chica más pequeña que la suya. Los efectos de la relatividad siempre se atribuyen a "los demás". Si la chica y el extraterrestre se encontraran en reposo el uno respecto al otro verían que sus dos reglas son igual de largas.

Llamamos ***longitud propia*** *de un objeto a la que medimos desde un sistema de referencia en el que el objeto se encuentra en reposo*. Si el objeto se encuentra sobre el eje de las equis del sistema, podemos determinar su longitud restando las coordenadas de sus extremos, por lo que la representamos como)x_0. Si observamos el mismo objeto desde un sistema de referencia respecto del cual el objeto se mueve con una velocidad υ en la dirección de su longitud, en nuestro ejemplo en la dirección del eje de la equis, la longitud)x que atribuimos al objeto será menor y vendrá determinada por la fórmula

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2} \qquad \textbf{(8)}$$

Podemos deducir esta fórmula en una situación particular que nos permite entender la relación entre la dilatación temporal y la contracción de longitudes. Imaginemos una nave espacial que se mueve con velocidad constante. Una parte de su viaje consiste en desplazarse desde las proximidades de un planeta P_1 hasta las proximidades de otro planeta P_2 que, casualmente (la imaginación lo puede todo) está en reposo respecto a P_1. Ya sabemos que este trayecto no dura lo mismo para un observador A en el planeta

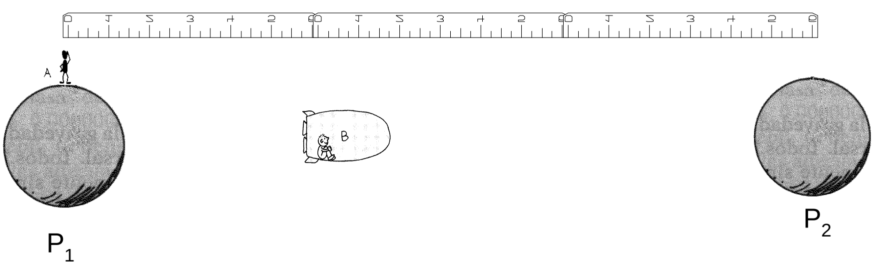

Figura 9 En el trayecto de viaje interplanetario considerado, el observador B en la nave mide el intervalo de tiempo propio, ya que respecto a su referencia el suceso inicial (paso por el planeta P_1) y el suceso final (paso por el planeta P_2) ocurren en el mismo lugar. Sin embargo, es el observador A en el planeta P_1 quien mide la longitud propia entre los planeta, al encontrarse en reposo respecto a ellos.

P_1 y para un observador B en la nave. El intervalo de tiempo medido por el habitante del planeta P_1, $\Delta t^{(A)}$, es mayor que el intervalo de tiempo medido por el ocupante de la nave, $\Delta t^{(B)}$ En efecto, para el observador B, el paso por las proximidades del planeta P_1 (suceso inicial) y el paso por el planeta P_2 (suceso final) ocurren en la misma posición, por lo tanto el intervalo de tiempo que mide es un intervalo de tiempo propio. Si υ es la velocidad con la que el observador A ve alejarse la nave, se satisface que

$$\Delta t^{(A)} = \frac{\Delta t^{(B)}}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^2}} \qquad \textbf{(11)}$$

A partir de este resultado es sencillo llegar a la conclusión de que la pareja de observadores atribuye un valor diferente a la distancia que separa el planeta P_1 del planeta P_2. El observador A puede identificar esta distancia con el desplazamiento $\Delta x^{(A)}$ que realiza la nave en el intervalo de tiempo $\Delta t^{(A)}$. El observador B también puede razonar de forma análoga; para él, durante el intervalo de tiempo $\Delta t^{(B)}$ el planeta P_1 realiza un desplazamiento $\Delta x^{(B)}$ que coincide con la distancia que separa el planeta P_1 del planeta P_2. Estos dos intervalos de tiempo no pueden coincidir porque la velocidad con la que el observador A ve alejarse la nave debe coincidir con la velocidad con la que el observador B ve alejarse el planeta P_1, de manera que se debe satisfacer que

$$\frac{\Delta x^{(A)}}{\Delta t^{(A)}} = \frac{\Delta x^{(B)}}{\Delta t^{(B)}} \qquad \textbf{(16)}$$

El observador A es quien mide la longitud propia que separa los planetas, ya que se encuentra en reposo respecto a ellos. Teniendo en cuenta (11) podemos deducir como se relaciona esta longitud propia con la estimada por el observador B, que se mueve con velocidad υ respecto a los planetas que la definen.

$$\Delta x^{(B)} = \Delta x^{(A)} \frac{\Delta t^{(B)}}{\Delta t^{(A)}} = \Delta x^{(A)} \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \qquad \textbf{(17)}$$

A.6 Una varilla de un metro de longitud se mueve con velocidad constante en sentido longitudinal respecto a un observador. ¿Qué valor ha de tener la velocidad para que el observador mida 0.5 metros?
Dato: $c = 3\times 10^8\ m/s$
Selectividad 1999

Solución: $c\sqrt{0.75} = 2.6\times 10^8\ m/s$

A.7 Una nave viaja desde la Tierra a la estrella Sirius, que se encuentra a una distancia de 8.5 años luz. El viaje dura 12 años para un tripulente de la nave (a) Determina la velocidad de la nave (b) Calcula la duración del viaje en la Tierra. (c) Durante el viaje los tripulantes de la nave determinan la distancia que separa Sirius de la tierra; ¿qué valor obtienen?
Dato: $c = 3\times 10^8\ m/s$
Selectividad 1992 Ampliado

Solución: (a) $8.5c/\sqrt{12^2+8.5^2} = 1.73\times 10^8\ m/s$ (b) $\sqrt{12^2+8.5^2}\ yr = 14.71\ yr$
(c) $8.5\cdot 12\cdot c\cdot yr/\sqrt{12^2+8.5^2} = 6.94\ c\cdot yr$

A.8 Un muon se ha originado por desintegración de un pión en las capas altas de la atmósfera y viaja hacia la superficie de la Tierra con una velocidad de $0.998c$. La vida media del muón se de 2 :s. (a) Calcula la distancia que recorre el muón antes de desintegrarse para un observador A en reposo en la superficie terrestre. (b) Considera ahora un observador B que viaja con el muón; justifica con qué velocidad ve acercarse la Tierra el observador B. (c) Determina que distancia ha recorrido la Tierra para el observador B durante la vida del muón. (d) Explica porque las distancias calculadas en los apartados a y c no coinciden.
Dato: $c = 3\times 10^8\ m/s$

Solución: (a) $9472.6\ m$. (b) $0.998c$. (c) $598.8\ m$ (d) El observador A mide una distancia propia mientras que el B no.

A.9 La longitud propia de cada uno de los lados de un cuadrado es a. (a) Determina el perímetro del cuadrado en un sistema de referencia que se mueve respecto al cuadrado con velocidad constante u en dirección paralela a la base del cuadrado. (b) Estudia el resultado si consideramos que u es mucho menor que c. (c) Estudia el resultado en el límite cuando u tiende a c. (c es la velocidad de la luz)
Selectividad 1994

Solución: (a) $p = 2a + 2a\sqrt{1-(u/c)^2}$ (b) $p \simeq 4a$ (c) $\lim\limits_{u \to c} p = 2a$

3.3 Validez de las transformaciones de Galileo

Ya indicamos, en su momento, que la aceptación de la constancia de la velocidad de la luz cuestiona la validez de las transformaciones de Galileo. Los resultados obtenidos respecto a la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud ponen claramente de manifiesto las limitaciones del razonamiento que se utiliza al deducirlas. Implícitamente se aceptan dos hipótesis que no son ciertas:

1. Se considera que el tiempo transcurre de la misma manera en los dos sistemas de referencia de manera que, aun cuando no se escribe, se emplea la ecuación $t' = t$.

2. Se supone que la distancia entre dos puntos es siempre la misma, independientemente del sistemas de referencia desde el cual se mida.

El gran logro de Einstein fue someter a crítica estas dos hipótesis cuya validez era considerada tan incuestionable que ni siquiera se formulaban como tales.

Por otra parte, siempre que una nueva teoría aspira a sustituir a una anterior, no basta con que deje claro en que está equivocada la teoría previa. Además debe explicar los resultados de la teoría antigua que estaban verificados más allá de toda duda. Este requerimiento se conoce como ***principio de correspondencia***. Para que los resultados de la relatividad especial sean válidos deben reproducir los de la mecánica Newtoniana, llamada mecánica clásica, cuando las rapideces consideradas son mucho menores que la rapidez de la luz.

Es sencillo comprobar, a partir de las expresiones de la dilatación temporal (4) y la contracción de la longitud (8), que observadores inerciales que se mueven uno respecto al otro con una velocidad pequeña en comparación con la velocidad de la luz, miden aproximadamente los mismos intervalos temporales y espaciales. Para ello solo es necesario tener en cuenta que, en esta circunstancia, el cociente $(v/c)^2$ que aparece en las fórmulas indicadas lo podemos considerar insignificante frente a 1, de manera que es aceptable realizar la aproximación $1-(v/c)^2 \bullet 1$. Por tanto, a velocidades pequeñas en comparación con la de la luz, las transformaciones de Galileo son una buena aproximación a la relatividad especial.

A partir de los principios de la relatividad especial se puede deducir un conjunto de ecuaciones, llamado ***transformaciones de Lorentz***, que permite relacionar las posiciones e instantes de tiempo que diferentes observadores inerciales atribuyen a un mismo suceso. No vamos a abordar la cuestión. Solo indicamos que la relación entre las velocidades de un móvil medidas desde dos referencias inerciales que se obtiene a partir de las transformaciones de Lorentz, es coherente con la evidencia de que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales. Si la referencia S' se mueve a lo largo del eje OX de la referencia S con velocidad v, un móvil que se mueva también sobre el eje OX con velocidad v'_x respecto a la referencia S' poseerá respecto a la referencia S una velocidad

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + \dfrac{v v_x'}{c^2}} \qquad \textbf{(25)}$$

Podemos comprobar fácilmente que cuando la velocidad respecto a la referencia S' es igual a la velocidad de la luz, $v'_x = c$, la velocidad respecto a la referencia S es la misma.

A.10 Un cohete interplanetario B se mueve en línea recta con una velocidad $0{,}60c$ con respecto a otro cohete A. El cohete A se mueve según la misma trayectoria rectilínea con una velocidad $0{,}70c$ con relación a la Tierra. Determinar la velocidad del cohete B respecto a la Tierra.

Selectividad 1995

Solución: $1.3c/1.42 = 2.79 \times 10^8\ m/s$

3.4 Sincronización de relojes y simultaneidad

Si muchas de las conclusiones a las que llegamos en el marco de la relatividad especial nos parecen a primera vista absurdas es porque contradicen una idea intuitiva muy arraigada en nosotros: el carácter absoluto de la simultaneidad. A priori todos consideramos que el hecho de que dos acontecimientos ocurran al mismo tiempo no es algo que pueda depender de la referencia inercial desde la que observemos. Sin embargo esto no es así.

> Dos sucesos que son simultáneos para un observador no lo son para otro observador que se mueva respecto al primero.

Si la simultaneidad carece de carácter absoluto, tampoco tiene carácter absoluto la sincronización de relojes.

> Dos relojes sincronizados en un sistema de referencia no están sincronizados en ningún otro sistema de referencia que se mueva respecto al primero.

Veamos de que manera podemos conseguir que dos relojes estén ***sincronizados***. Supongamos que, respecto a una referencia S, tenemos dos relojes en reposo, situados en los puntos A y B, separados una distancia L. ¿Como podemos sincronizar estos dos relojes? Si un observador en A mira el reloj situado en B y hace que su reloj marque la misma hora, los relojes no estarán sincronizados debido a que la luz tarda un intervalo de tiempo L/c en recorrer la distancia que separa un reloj de otro. Para sincronizar los relojes, el observador en A debe hacer que su reloj esté adelantado L/c respecto a la hora que avista en el reloj situado en B. Entonces verá que el reloj en B está retrasado L/c respecto a su reloj, pero calculará que los relojes están sincronizados cuando tenga en cuanta el intervalo de tiempo L/c que la luz tarda en llegar hasta él desde el punto B.

Todos los observadores en reposo respecto a la referencia S, excepto los que se encuentren equidistantes de ambos relojes, verán que estos marcan horas diferentes, pero también podrán calcular que los relojes están sincronizados cuando estimen el intervalo de tiempo que tarda la luz procedente de cada reloj en llegar hasta ellos.

Un método equivalente para sincronizar dos relojes consiste en colocar dos observadores, A y B, uno en cada reloj, y un tercer observador C a mitad de camino entre los relojes. El observador C emite una señal luminosa hacia los observadores A y B, de modo que estos, al recibir la señal, hacen que sus relojes marcen una misma hora ya preestablecida.

Examinemos ahora la cuestión de la ***simultaneidad***. Consideremos los tres observadores A, B y C dispuestos como antes. Supongamos que A y B se ponen de acuerdo para encender sendas bombillas en un instante determinado (habiendo sincronizado previamente sus relojes). El observador C verá la luz procedente de las dos bombillas en el mismo momento, y como está equidistante de A y B, llegará a la conclusión de que el encendido de las bombillas ha sido simultáneo.

Otros observadores en reposo respecto a la referencia S verán primero la luz procedente de una de las dos bombillas, dependiendo de su posición, pero después de tener en cuenta el tiempo que la luz emplea en llegar hasta ellos, calcularán que las bombillas se han encendido simultáneamente. Así podemos definir que

> Dos sucesos en un sistema de referencia son simultáneos si las señales luminosas procedentes de los sucesos alcanzan en el mismo instante a un observador situado a mitad de camino entre ellos

Para demostrar que dos sucesos que son simultáneos en el sistema de referencia S no lo son en otros sistemas S' que se mueven respecto a S, utilizaremos un ejemplo imaginario presentado por Einstein (ver *figura 11)*. Un tren se está moviendo con velocidad constante y pasa por delante del anden de una estación. Llamamos S' al sistema de referencia del tren y S al sistema de referencia del anden. En el tren disponemos de un observador C' situado justo en el medio del tren.

Supongamos ahora que caen sobre el tren dos rayos, uno en la parte delantera y otro en la parte trasera, que son percibidos como simultáneos en el sistema de referencia del andén: un observador C en un punto intermedio entre las posiciones A y B en donde caen los rayos, observa los dos destellos en el mismo momento.

Puesto que C' está en el punto medio del tren, a mitad de camino entre los lugares donde han caído los rayos, los sucesos serán simultáneos en el sistema de referencia del tren solo si C' ve los destellos procedentes de A' y B' al mismo tiempo. Sin embargo C' ve el destello procedente de la parte delantera del tren antes que el destello que viene de la parte trasera.

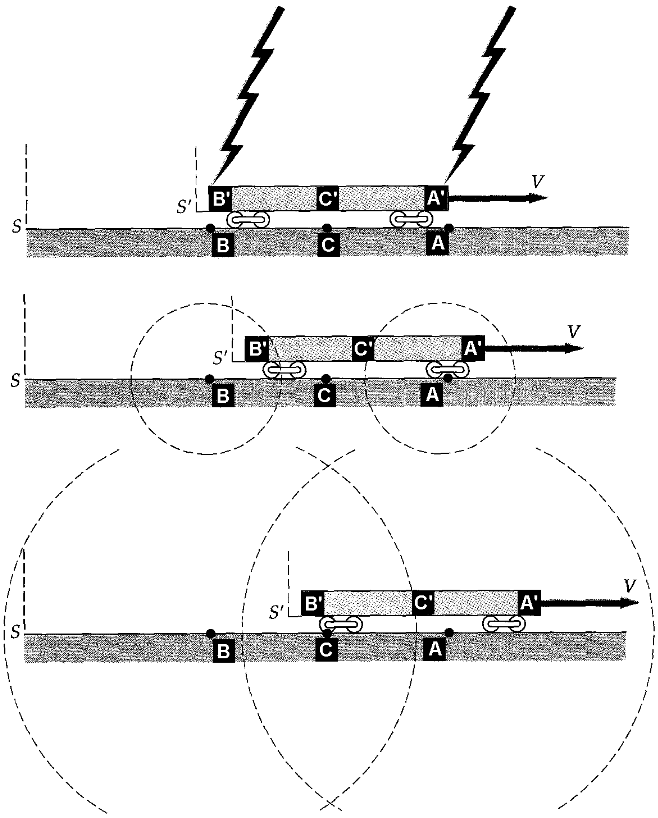

Figura 10 Los rayos que caen sobre el anden y el tren son simultáneos en el sistema de referencia S unido al anden. La luz procedente de estos sucesos alcanza al observador C, situado en el punto medio entre ambos, al mismo tiempo. En el sistema de referencia S' unido al tren, que se mueve con cierta velocidad respecto al anden, los rayos no caen simultáneamente. La luz procedente del rayo que cae en la parte delantera del tren alcanza al observador C' antes que la luz procedente del rayo que cae en la parte posterior del tren.

Podemos comprender este hecho considerando el movimiento de C' según se ve desde el sistema de referencia del anden (ver *figura 11*). En el instante en que la luz procedente del destello delantero alcanza C', este se ha movido una cierta distancia, acercándose hacia el destello delantero y alejándose del destello trasero. Por ello, entonces, la luz procedente del destello trasero aún no ha alcanzado C'. Así, C' llega a la conclusión de que la caída de los rayos no es simultánea: para él, el rayo que alcanza la parte delantera del tren cae antes de que alcanza en la parte trasera. Además, todos los observadores en reposo respecto al sistema de referencia S' estarán de acuerdo con C' cuando hayan tenido en cuenta el tiempo que tarda la luz de cada destello en llegar a ellos.

Si dos relojes situados en A y B están sincronizados en el sistema de referencia S del anden, marcarán la misma hora cuando caigan los rayos. Si el reloj en A marca las *12:00* del medio día cuando el rayo cae en A, el reloj en B marcará también las *12:00* cuando el rayo cae en B. Sin embargo C' llega a la conclusión de que ambos relojes no están sincronizados. Como para C' el rayo que alcanza A' cae antes que el rayo que alcanza B', considera que el reloj en A marca las *12:00* antes que el reloj en B.

4 Equivalencia entre masa y energía

Cuando en el tema de electromagnetismo estudiamos el movimiento de cargas en el seno de campos magnéticos uniformes, hicimos referencia a una forma de medir el cociente entre la masa m y la carga q de una partícula. Se introduce la partícula con una velocidad v conocida en el seno de un campo magnético de intensidad B, también conocida, cuya dirección es perpendicular a la dirección de la velocidad; y se mide el radio de curvatura r de la trayectoria circular que describe la partícula. Es inmediato demostrar la relación

$$\frac{m}{q} = \frac{B\,r}{v}$$

Fue esta la técnica que empleó Thomson para determinar la razón entre la masa y la carga de los electrones y posteriormente se utilizó para estudiar otras partículas. Pero al realizar este tipo de experimentos se obtuvo un resultado imprevisto. El valor del cociente aumenta al aumentar la velocidad con la que el electrón entraba en el campo magnético, como si al aumentar de velocidad el electrón también "aumentara su masa".

Existen explicaciones de la relatividad especial en las que se utiliza la idea de que la masa de los objetos se modifica con su velocidad haciéndose mayor al aumentar ésta. Es una forma de argumentar que ha existido en la historia de la relatividad especial, teoría que ya tiene casi un siglo de antigüedad, y como tal perdura en algunos manuales. Pero actualmente se recomienda encarecidamente renunciar a esta idea ya que puede inducir a error.

Conviene que nos planteemos el problema desde el punto de vista de la necesidad de redefinir las magnitudes básicas en función de las cuales formulamos las leyes de la mecánica. Un sencillo experimento mental puede aclararnos la cuestión. Consideremos una fuerza constante $\vec{F}$ actuando sobre un cuerpo de masa m durante un tiempo indefinido. Si utilizamos la definición de fuerza, $\vec{F} = m\vec{a}$, debemos llegar a la conclusión de que el cuerpo sufre siempre la misma aceleración y por tanto su velocidad aumenta de forma progresiva sin limitación alguna. Sin embargo este resultado es incompatible con las expresiones deducidas para la dilatación temporal, (4), y la contracción de longitudes, (8). Ambas obligan a considerar la velocidad de la luz, c, como la máxima velocidad posible.

La mejor solución consiste en establecer una nueva definición de fuerza que sea coherente con la relatividad especial. *Pero ello se hace tomando como magnitud fundamental de la dinámica no la fuerza sino la cantidad de movimiento*. El propio Newton, que nunca estuvo demasiado satisfecho del concepto de fuerza para describir las interacciones, no consideró la famosa ecuación $\vec{F} = m\vec{a}$ como la definición de fuerza. Concibió la fuerza como una medida de la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \textbf{(29)}$$

y dedujo la ecuación $\vec{F} = m\vec{a}$ suponiendo que la cantidad de movimiento venia dada por

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \textbf{(31)}$$

La intuición de Newton marca el camino para generalizar el concepto de fuerza en el marco de la relatividad especial. *Podemos seguir entendiendo la* ***fuerza*** *como una medida de la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento definiendo la* ***cantidad de movimiento*** *como*

$$\vec{p} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \textbf{(32)}$$

La cantidad de movimiento aumenta de la misma manera que el tiempo se dilata al aumentar la rapidez. La ecuación nos dice que el momento es enorme a rapideces que se aproximen a la de la luz. En el límite en el que v tienda a c el denominador de la ecuación tiende a cero. ¡Esto significa que la cantidad de movimiento tiende a infinito!. *Podemos interpretar que para impulsar un objeto hasta la velocidad de la* *luz precisamos conferirle una cantidad de movimiento infinita, lo cual es claramente imposible. Queda patente que ningún objeto con masa pude llegar a adquirir la velocidad de la luz.*

Si comparamos la definición Newtoniana de cantidad de movimiento con la relativista observamos que en la definición newtoniana la masa m es la constante de proporcionalidad entre cantidad de movimiento y velocidad, mientras que en la definición relativista el factor de proporcionalidad no es una constante ya que depende de la propia velocidad, siendo su valor

$$\frac{\|\vec{p}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{33}$$

Es a este término al que en ocasiones se le llama masa en movimiento[2].

> **A.11** ¿Qué velocidad debe tener una partícula para que su masa sea cinco veces su masa en reposo?
> *Selectividad 1994*
> Solución: $c\sqrt{24}/5$

Si hasta el momento la teoría de la relatividad especial de Einstein nos ha deparado sorpresas todavía no hemos abordado la que sin lugar a dudas es su revelación más notable: ***la concepción de la masa como una forma de energía***. Todo objeto con masa tiene "energía de existencia", aún cuando no tenga energía cinética porque esté en reposo y no posea energía potencial. La "energía de existencia" se llama ***energía en reposo*** y se denota como E_0. La energía en reposo E_0 se relaciona con la masa a través de la ecuación más famosa de todos los tiempos

$$E_0 = m c^2 \tag{35}$$

El elevado valor de c nos dice que una masa pequeña corresponde a una enorme cantidad de energía en reposo. En este expresión, c^2, a pesar de poseer magnitud de velocidad al cuadrado, debe interpretarse sólo como el factor de conversión entre unidades de masa y unidades de energía. De modo que la masa de un objeto es de hecho la energía que contiene.

La energía en reposo, como cualquier otra forma de energía, puede transformarse. Un ejemplo común es la conversión de energía en reposo en energía cinética que se lleva a cabo cuando encendemos una cerilla. Las moléculas de fósforo que contiene la cabeza de la cerilla se combinan con moléculas de oxígeno del aire para formar nuevas moléculas cuya energía cinética es apreciablemente mayor que las que tenían las moléculas de fósforo y oxígeno antes de la reacción, de aquí que la cerilla encendida esté caliente. La masa de las moléculas así producidas es muy ligeramente inferior a la de las moléculas de fósforo y oxígeno originales. Desde el punto de vista de la masa, el todo es levemente inferior a la suma de las partes, pero no mucho: la diferencia es de alrededor de una parte en 10^9.

Todas las reacciones que ceden energía están acompañadas de una disminución correspondiente de la masa. En las reacciones nucleares, como las que tienen lugar en las estrellas, la conversión de energía en reposo en energía cinética es considerablemente superior que en las reacciones químicas; la disminución de la masa es de alrededor de una parte en 10^3.

---

[2] La inconveniencia del concepto de "masa en movimiento" radica en que puede inducir al error de considerar que la masa del objeto se modifica por el hecho de poseer velocidad. Es más adecuado seguir manteniendo la masa como una propiedad invariante y considerar que la dependencia de la cantidad de movimiento con la velocidad es más compleja que la supuesta en la física newtoniana. En cualquier caso, debido a lo extendido del concepto, es necesario hacer referencia al mismo y explicar la notación que emplean los manuales que lo utilizan. La propiedad invariante masa, a la que en el presente texto nos referimos simplemente como masa, y denotamos por la letra m, es denominada "masa en reposo" y denotada por m_0 La letra m se reserva para designar a "la masa en movimiento". Se llega incluso a establecer una ecuación que relaciona "ambas masas"

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Pero la ecuación $E_0 = mc^2$ no sólo es válida para las reaccione químicas y nucleares. Todo cambio de la energía en reposo corresponde a un cambio en la masa. La masa del filamento de una bombilla a la que se suministra energía eléctrica es mayor que cuando la bombilla está apagada. Una taza de café tiene más masa cuando el líquido está caliente que cuando está frío. La masa del resorte de un reloj al que se ha dado cuerda es mayor que cuando el reloj no tiene cuerda. Pero los cambios de la masa que intervienen en estos ejemplos son muy pequeños; demasiado pequeños para ser medidos por los métodos convencionales y nunca se tienen en cuenta. ¡No es de extrañar que la relación fundamental entre la masa y la energía no se descubriera hasta principios del siglo XX!

A.12 Demuestra que si un cuerpo emite una cantidad de energía $)E$ su masa disminuye en $)E/c^2$. Determina a qué velocidad debe convertirse masa en energía para suministrar una potencia de $30\ MW$.
Dato: $c = 3\times10^8\ m/s$
Selectividad 1994

Solución: Cada segundo $0.1\ kg$ se deben de convertir en masa.

A.13 El Sol emite cada minuto una cantidad de energía igual a $2.34\times10^{28}\ J$. Halla cuanto tiempo tardará la masa del Sol en reducirse a la mitad, suponiendo que la radiación permanece constante.
Datos: Masa del Sol = $1.97\times10^{30}\ kg$; $c = 3\times10^8\ m/s$
Selectividad 1995

Solución: $2.6\times10^{17}\ minutos = 4.96\times10^{11}\ años$.

Podría pensarse que el origen matemático de esta sorprendente fórmula es complejo. Nada más lejos de la realidad. Sabemos que el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es la causa de la variación de su energía cinética. Si este cálculo lo realizamos tomando como base la definición relativista de cantidad de movimiento, obtenemos que la ***energía cinética*** de una partícula de masa m que se mueve con velocidad v viene dada por

$$E_c = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m c^2 \qquad \textbf{(36)}$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$E_c + mc^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \textbf{(37)}$$

Así podemos interpretar que mc^2 representa la energía en reposo de la partícula si consideramos que la ***energía total*** de la partícula, suma de la energía cinética y la energía en reposo, y denotada por E, viene dada por

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad \textbf{(38)}$$

Como en las aplicaciones prácticas se suele utilizar más la cantidad de movimiento que la velocidad, es interesante disponer de una relación entre energía total E y cantidad de movimiento p. Esto se consigue eliminando la velocidad en el sistema de ecuaciones constituido por (32) y (38). El resultado es

$$E^2 = p^2 c^2 + (m c^2)^2 \qquad \textbf{(39)}$$

Para velocidades pequeñas en comparación con las de la luz, las expresiones relativistas de la cantidad de movimiento y la energía cinética deben aproximarse a las correspondientes fórmulas newtonianas. En el caso de la primera de estas magnitudes es inmediato comprobar que (32) reproduce la definición newtoniana de cantidad de movimiento. Para velocidades muy inferiores a la de la luz podemos considerar el cociente $(v/c)^2$ insignificante frente a 1, de manera que es aceptable realizar la aproximación $1\text{-}(v/c)^2 \bullet 1$. Poner en evidencia la correspondencia entre la expresión relativista de la energía cinética y la newtoniana es más complejo (ver Anexo I).

A.14 Una partícula de masa en reposo $m_0 = 2.4\times10^{-28}\ kg$, viaja con una velocidad $v = 0.8c$, siendo c la velocidad de la luz ¿Cual es la relación entre su energía cinética relativista y su energía cinética clásica?
Selectividad 1997

Solución: $E_{c\ rel}/E_{c\ clas} = 2/0.96$ El resultado es independiente de la masa de la partícula.

A.15 Un electrón tiene una energía en reposo de $0.51\ MeV$. Si el electrón se mueve con una velocidad de $0.8c$, se pide determinar (a) su masa relativista, (b) su cantidad de movimiento y (c) su energía total.
Datos: $e= 1.6\times10^{-19}\ C;\ c = 3\times10^8\ m/s.$
Selectividad 2000

Solución: (a) $1.5\times10^{-30}\ kg$ (b) $3.63\times10^{-22}\ kgm/s$ (c) $1.36\times10^{-13}\ J$

A.16 Un electrón es acelerado por una fuerza conservativa desde el reposo hasta una velocidad final v próxima a la de la luz. En este proceso su energía potencial disminuye en $4.2\times10^{-14}\ J$. Determina la velocidad v que adquiere el electrón.
Datos: Masa del electrón en reposo, $m_e = 9.11\times10^{-31}\ kg$; $c = 3\times10^8\ m/s$.
Selectividad 1999

Solución: El electrón gana una energía cinética E_c igual a la energía potencial que pierde. Su velocidad se puede despejar de la fórmula de la energía cinética relativista. Se obtiene

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{(E_c + mc^2)^2}} = 0.75c$$

5 Principio de equivalencia

La generalización de la teoría de la relatividad a los sistemas de referencia no inerciales, llevada a cabo por Einstein en 1916, se conoce con el nombre de ***teoría general de la relatividad***. Desde el punto de vista matemático es más compleja que la teoría especial de la relatividad, y existen pocas situaciones en las que pueda comprobarse. Sin embargo su importancia requiere que abordemos, al menos, una breve discusión cualitativa.

El fundamento de la teoría general de la relatividad es el ***principio de equivalencia*** que podemos enunciar de la siguiente manera:

> Un campo gravitatorio homogéneo es completamente equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado.

Este principio surge en la mecánica newtoniana debido a la identidad existente entre ***masa inercial***, la magnitud que aparece en la segunda ley de Newton como constante de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración, y ***masa gravitatoria***, la magnitud responsable de las atracciones gravitatorias. En un campo gravitatorio uniforme, todos los objetos caen con la misma aceleración $\vec{g}$ independientemente de su masa, ya que la fuerza gravitatoria es directamente proporcional a la masa (gravitatoria) mientras que la aceleración es inversamente proporcional a la masa (inercial).

Supongamos un compartimiento situado en el espacio, alejado de toda materia y que se encuentra sometido a una aceleración uniforme $\vec{a}$, tal como se muestra en *la figura 11.* No se puede llevar a cabo ningún experimento mecánico en el interior del compartimiento que permita distinguir si éste se encuentra acelerando en el espacio o se encuentra en reposo (o moviéndose con velocidad uniforme) en presencia de un campo gravitatorio uniforme de intensidad $\vec{g} = -\vec{a}$. Si dentro del compartimiento se sueltan algunos objetos, caerán hacia el suelo con una aceleración $\vec{g} = -\vec{a}$. Si una persona está sobre una báscula de baño o de muelle, leerá que su "peso" tiene un valor $-m\vec{a}$.

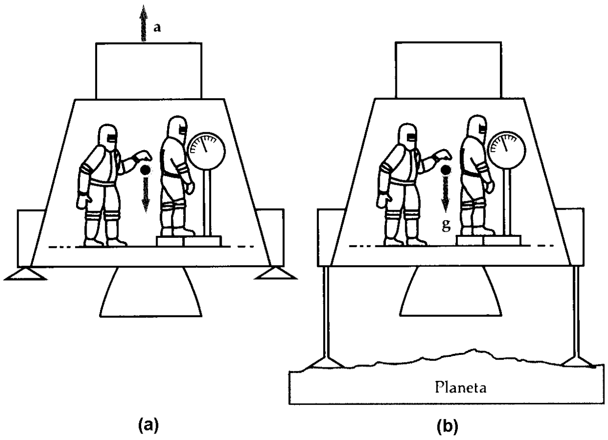

Figura 11 Los resultados de los experimentos en un sistema de referencia uniformemente acelerado (a) no pueden distinguirse de los realizados en un campo gravitatorio uniforme si la aceleración **a** y la intensidad del campo gravitatorio **g** tienen el mismo módulo.

Einstein supuso que el principio de equivalencia se aplica a todas las ramas de la física y no sólo a la mecánica. Consideró que no podía existir ningún experimento que permitiera diferenciar entre estar sometido a un campo gravitatorio o encontrarse en una referencia uniformemente acelerada. Vamos a estudiar ahora, de forma cualitativa, un pequeño número de consecuencias que se derivan de esta hipótesis.

La primera de las consecuencias del principio de equivalencia que discutiremos, la ***desviación de un haz de luz*** en un campo gravitatorio, fue también la primera en comprobarse experimentalmente. En la *figura 12-a* se muestra un haz de luz que entra en un compartimiento que está acelerado. Se indican las diferentes posiciones del compartimiento para instantes separados por intervalos de tiempo iguales. Como el compartimiento está acelerado, el desplazamiento que realiza cada vez es mayor. Por tanto, la trayectoria del haz de luz observada en el interior del compartimiento es una parábola tal como se representa en la *figura 12-b*. Pero de acuerdo con el principio de equivalencia, no es posible distinguir un compartimiento en aceleración y otro con velocidad uniforme en un campo gravitatorio uniforme. Así, concluimos, que un haz de luz, como un objeto masivo, adquiere aceleración como consecuencia de la acción de un campo gravitatorio.

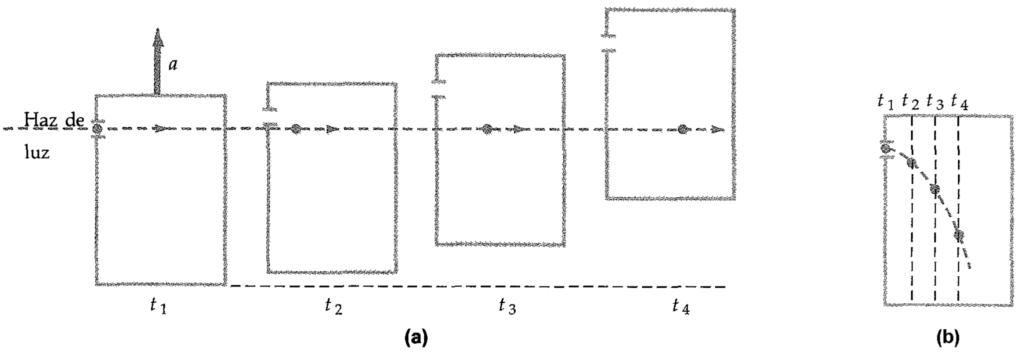

Figura 12 (a) Haz de luz moviéndose en línea recta a través de un compartimento que experimenta una aceleración uniforme. La posición del compartimento se muestra en los instantes t_1, t_2, t_3 y t_4, separados por intervalos de tiempo iguales. (b) En el sistema de referencia del compartimento la luz describe una trayectoria parabólica como lo haría una pelota si fuera lanzada horizontalmente. Para que el efecto visual sea más explícito los desplazamientos verticales en (a) y en (b) están muy exagerados.

En un lugar próximo a la superficie terrestre, la luz "caerá" con una aceleración de 9.81 m/s^2. Debido a la enorme velocidad de la luz el efecto de esta aceleración es difícil de observar. En un desplazamiento de 3000 km, que la luz recorre aproximadamente en 0,01 s, la desviación gravitatoria que la Tierra produce en la luz es de aproximadamente 0,5 mm. Einstein predijo que la desviación de la luz en un campo gravitatorio podría observarse cuando la luz procedente de una estrella pasara cerca del Sol, como se muestra en la *figura 13*. Debido al brillo del Sol este fenómeno no podía observarse habitualmente. Esta desviación pudo ser medida en 1919 durante un eclipse de Sol y el resultado coincidió plenamente con los cálculos de Einstein.

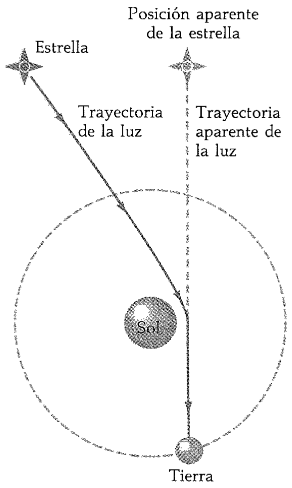

Figura 13 Desviación del haz de luz procedente de una estrella debida a la atracción gravitatoria del Sol (el efecto está muy exagerado). La posición de la estrella observada desde la Tierra cambia respecto a la posición del resto de estrella no afectadas. Esta observación solo se puede realizar durante un eclipse de Sol.

Otra sorprendente predicción de la Relatividad General hace referencia a la ***dependencia del transcurrir del tiempo con la intensidad del campo gravitatorio***. El intervalo de tiempo entre dos sucesos es mayor cuanto más bajo sea el potencial gravitatorio, es decir, cuanto más intenso sea el campo gravitatorio. Un reloj situado en una región de potencial gravitatorio bajo (campo gravitatorio intenso) irá más despacio que otro situado en una región de potencial gravitatorio elevado (campo gravitatorio débil).

Este fenómeno afecta a los procesos de emisión y absorción de radiación electromagnética. Si observamos las líneas espectrales de un mismo átomo situado en dos zonas de potencial gravitatorio diferente, resulta que las líneas correspondientes al potencial gravitatorio menor (campo gravitatorio más intenso) están desplazadas hacia frecuencias menores (mayor periodo). Este desplazamiento hacia frecuencias bajas recibe el nombre de desplazamiento gravitatorio hacia el rojo y se ha observado, por ejemplo, en el espectro de emisión de determinados átomos de la atmósfera del Sol.

Hoy en día es necesario tener en cuenta el efecto de la gravedad sobre el funcionamiento de los relojes situados en satélites en órbita. Como están sometidos a un potencial gravitatorio mayor que los relojes de la superficie de la Tierra, adelantan respecto a estos últimos. En el caso del Sistema de Posición Geográfica (GPS por sus siglas en ingles, Global Positioning System) es necesario corregir este fenómeno relativista ya que se requiere medir la hora con una precisión de 10^{-12} s.

La más conocida de todas las consecuencias de la Teoría de la Relatividad General consiste en la concepción de que ***el universo está en expansión***. Tras elaborar su teoría, Einstein intentó construir un modelo sencillo de universo, para ver como evolucionaba con el tiempo; entonces obtuvo un resultado matemático que incluso a él le sorprendió: sus ecuaciones solo tenían solución si el espacio estaba continuamente dilatándose para todos los observadores. Einstein no aceptó este resultado e introdujo modificaciones en su modelo para “congelar la dilatación del espacio”. Sin embargo, poco después, Hubbel obtuvo la evidencia experimental de que efectivamente vivimos en un universo en expansión: el desplazamiento hacia el rojo de los espectros de las galaxias lejanas (esta cuestión ya la tratamos en el tema de Óptica).

Como ejemplo final de las predicciones de la Teoría de la Relatividad General, mencionaremos los ***agujeros negros***, predichos por primera vez por Oppenheimer y Snyder en 1939. De acuerdo con la teoría general de la relatividad, si la densidad de un objeto es suficientemente grande, la atracción gravitatoria es tan enorme que, para distancias suficientemente próximas, nada puede escapar a su acción, ni siquiera la luz o la radiación electromagnética. Se llama radio crítico de un agujero negro la distancia a su centro por debajo de la cual el campo gravitatorio impide salir incluso a la radiación electromagnética. El efecto que produce un agujero negro sobre los objetos que se encuentran fuera del radio crítico es el mismo que el de cualquier otra masa. Una de las características de un objeto de este tipo es que nada de lo que ocurre en su interior puede ser comunicado al mundo exterior.

Como ocurre con cierta frecuencia en física, un cálculo simple, aunque incorrecto, permite determinar los valores correctos para la relación entre la masa y el radio crítico de un agujero negro. En mecánica newtoniana, el valor de la velocidad necesaria para que una partícula escape de la superficie de un planeta o estrella de masa M y radio R viene dada por la ecuación.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{45}$$

Si hacemos la velocidad de escape igual a la velocidad de la luz y despejamos el radio, obtenemos el radio crítico R_s llamado radio de Schwarzschild:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \tag{46}$$

Para que un objeto de masa igual a la de nuestro Sol fuese un agujero negro, su radio debería ser aproximadamente igual a 3 km. Como un agujero negro no emite radiación y su radio se espera que sea pequeño, la detección de este objeto no es fácil. Lo mejor que podría ocurrir para detectar un agujero negro es que éste fuese compañero de una estrella normal en un sistema binario de estrellas. La medida del desplazamiento doppler de la luz procedente de la estrella normal nos permitiría llevar a cabo un cálculo de la masa de su compañero invisible con lo que determinaríamos si es lo suficientemente grande para ser un agujero negro. Actualmente existen varios candidatos excelentes -uno en la constelación Cygnus, otro en la Nube Magallanes, y quizás también uno en nuestra propia galaxia- pero las evidencias no son, por el momento, concluyentes.

Anexo I: Correspondencia entre la energía cinética relativista y la energía cinética newtoniana

Para demostrar la correspondencia entre la energía cinética relativista y la energía cinética newtoniana debemos emplear un resultado matemático conocido como desarrollo del binomio

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots \qquad \textbf{(47)}$$

Si utilizamos esta ecuación para desarrollar el término

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(48)}$$

considerando $x = -(v/c)^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}\left[-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^2 + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots\end{aligned} \qquad \textbf{(49)}$$

Si ahora sustituimos en la expresión de la energía cinética relativista (36) obtenemos

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - mc^2 \\ &= mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots\right] - mc^2 \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots - mc^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{3}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots\right)\end{aligned} \qquad \textbf{(50)}$$

Para velocidades muy inferiores a la de la luz el cociente $(v/c)^2$ y sus potencias se pueden considera erar insignificantes frente a *1*. De esta manera obtenemos la correspondencia con la expresión newtoniana de la energía cinética.